INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika
na PřF Univerzity Palackého v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

Soustavy lineárních rovnic

Michal Botur

Přednáška 4

KAG/DLA1M: Lineární algebra 1

Soustavy lineárních rovnic

Ukážeme si efektivní metodu založenou na Gaussově eliminační metodě, pomocí které dokážeme vyřešit libovolnou soustavu lineárních rovnic.

Definice 4.1 *Soustavou m-rovnic o n neznámých nad tělesem* $\mathbf{T}$ rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= a_m, \end{aligned}$$

kde hodnoty $a_{ij}, a_j \in \mathbf{T}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$. Symboly $x_1, \ldots, x_n$ nazýváme neznámé.

Řekneme, že uspořádaná n-tice prvků $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{T}^n$ je řešením soustavy lineárních rovnic, jestliže platí (v tělese $\mathbf{T}$) následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n &= a_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n &= a_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n &= a_m. \end{aligned}$$

K řešení soustav lineárních rovnic lze elegantně využít Gaussovy eliminační metody. K tomuto je třeba ukázat, jakým způsobem přepíšeme soustavu do matice. Ještě poznamenejme, že nadále budeme pracovat s rovnicemi nad tělesm $\mathbf{T}$, aniž bychom toto zdůrazňovali.

Definice 4.2 Mějme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= a_m. \end{aligned}$$

Potom matici přiřazenou této soustavě rozumíme matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_m \end{array}\right).$$

Svislá čára v matici pouze zvyšuje přehlednost. Všechny operacích s maticí budeme provádět tak, jakoby tam ona svislá čára nebyla. Je snadno vidět, že maticový zápis jednoznačně odpovídá jedné soustavě a, že každá soustava má jediný maticový zápis. Následující věta nám ukáže nejpodstatnější skutečnost, kterou následně budeme využívat k řešení soustav.

Věta 4.1 *Jestliže dvě matice přiřazené některým soustavám lineárních rovnic jsou řádkově ekvivalentní, potom mají stejnou množinu řešení.*

Při řešení soustavy lineárních rovnic budeme Gaussovou eliminační metodou upravovat přiřazenou matici tak, aby levá část matice obsahovala (jako svou část – po odmyšlení si některých sloupců) jednotkovou matici.

Chceme-li řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

nad reálnými čísly. Sestavíme si nejprve přiřazenou matici a poté provedeme Gaussovou eliminační metodou úpravy takové, abychom uvnitř levé strany dostali jednotkovou matici.

V následujícím výpočtu nejprve pomocí prvního řádku vynulujeme všechny ostatní členy v prvním sloupci, poté pomocí druhého řádku vynulujeme ostatní členy ve třetím sloupci a nakonec pomocí třetího řádku vynulujeme ostatní členy ve druhém sloupci. Nakonec pouze přehodíme řádky a vynásobíme jednotlivé řádky tak, abychom obdrželi v levé straně hledanou jednotkovou matici.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Věta 4.1 nám nyní říká, že naše soustava rovnic a soustava odpovídající poslední matici našeho výpočtu mají stejnou množinu řešení. Poslední soustava je ale ve značně jednodušším tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_4 &= -1 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Z čehož plyne, že položí-me li x_4 rovno parametru p dostáváme

$$x_1 = p, x_2 = -1 + 2p, x_3 = 2 - p, x_4 = p.$$

Z čehož plyne, že řešením jsou právě čtveřice ve tvaru

$$(p, -1 + 2p, 2 - p, p) = [0, -1, 2, 0] + p(1, 2, -1, 1).$$

Všimněme si ještě, že počet parametrů je roven počtu sloupců v levé části, které nejsou součástí vytvořené jednotkové matice.

V případě, že řešíme soustavu rovnic Gaussovou eliminační metodou, může nastat situace, že v některé matici vytvoříme řádek ve tvaru

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

V případě, že $k = 0$ můžeme tento řádek v dalším výpočtu ignorovat. Jestliže $k \neq 0$, potom nám vytvořený řádek říká, že $k = 0$ což je vždy sporné, proto daná soustava nemá řešení.

Některé pojmy z teorie soustav lineárních rovnic

Definice 4.3 Soustava rovnic mající na pravých stranách samé nuly

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

se nazývá *homogenní soustavou lineárních rovnic*

Věta 4.2 *Homogenní soustava je vždy řešitelná, přičemž počet parametrů řešení je roven číslu $n - h$, kde n je počet neznámých a h hodnost levé strany přiřazené matice.*

Najděte vektor, který je řešením každé homogenní soustavy lineárních rovnic.

Definice 4.4 *Přiřazenou soustavu lineárních rovnic k dané soustavě lineárních rovnic* rozumíme soustavu, která vznikne nahrazením koeficientů na pravé straně soustavy za nuly.

Věta 4.3 *Je-li soustava lineárních rovnic řešitelná a je-li vektor $(y_1, \ldots, y_n)$ řešením této soustavy, potom každé řešení této soustavy lze vyjádřit ve tvaru $(y_1, \ldots, y_n) + (h_1, \ldots, h_n)$, kde $(h_1, \ldots, h_n)$ je řešením přiřazené homogenní soustavy rovnic.*

Jako důsledek vyslovených tvrzení dostáváme větu

Věta 4.4 *Je-li soustava lineárních rovnic řešitelná, potom počet parametrů řešení je roven číslu $n - h$, kde n je počet neznámých a h hodnost levé strany přiřazené matice.*

Frobeniova věta nám ukazuje užitečný nástroj jak rozpoznat, je-li soustava řešitelná.

Věta 4.5 *Soustava rovnic je řešitelná jestliže hodnost levé strany přiřazené matice je rovno hodnosti celé přiřazené matice (zahrnující levou i pravou část).*

Takzvané Crammerovo pravidlo, které je obsaženo v následující větě nabízí elegantní způsob jak řešit některé soustavy rovnic.

Věta 4.6 *Mějme soustavu n rovnic o n neznámých. Označme si A matici ležící na levé straně přiřazené matice soustavy a A_i matici, která vznikna z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupcovým vektorem z pravé strany přiřazené matice.*

Potom platí, že vektor

$$\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|} \right)$$

je jediným řešením soustavy.

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

Potom podle Crammerova pravidla sestavme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a ptoto platí

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Reference

[1] D. Hort, J. Rachůnek: Algebra I., [Univerzita Palackého V Olomouci, 2003].

[2] Bican L.: Lineární algebra, [SNTL Praha, 1979.].

[3] Waerden, L.: Algebra I., [Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971.].